МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико – математический факультет
Кафедра вычислительной математики

И. О. Арушанян

Избранные задачи для семинарских занятий по численным методам: квадратурные формулы Ньютона–Котеса

Учебное пособие

Москва, 2020

Данное учебное пособие содержит методические материалы для проведения семинарских занятий на четвертом курсе механико-математического факультета МГУ по учебной дисциплине “Численные методы”, на которых рассматриваются квадратурные формулы Ньютона–Котеса.

Задачи и решения

1. Оценить число узлов n составной формулы трапеций, необходимых для вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)}$$

с точностью ε.

Решение. Для оценки n воспользуемся следующей мажорантной оценкой погрешности R_T составной квадратурной формулы трапеций:

$$R_T \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,M_2.$$

Здесь a и b — пределы интегрирования и M_2 — равномерная норма (или норма Чебышева) второй производной подынтегральной функции $f(x)$:

$$M_2 = \|f''(x)\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

В нашем случае подынтегральная функция в нуле имеет интегрируемую особенность. Сделаем замену переменных $x = t^2$ и преобразуем интеграл к следующему виду:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)} = \int\limits_0^1 \frac{2t\,dt}{2t\,(1+t^4)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^4}.$$

Применим мажорантную оценку погрешности R_T к преобразованному интегралу, в котором подынтегральная функция $f_1(x)$ имеет вид

$$f_1(x) = \frac{1}{1+t^4}.$$

Из простых вычислений следует, что $\|f_1''(x)\|_C = 8$. Оценку числа узлов n получим из мажорантной оценки:

$$R_T \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,M_2 = \frac{1}{12n^2}\,8 = \frac{2}{3n^2} \le \varepsilon.$$

Отсюда получаем ответ:

$$n \sim \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}.$$

2. Преобразовать интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$$

так, чтобы для его вычисления можно было непосредственно применить составную формулу трапеций. Оценить количество узлов n, необходимых для вычисления преобразованного интеграла с точностью ε.

Решение. Как и в задаче 1, для оценки количества узлов n воспользуемся мажорантной оценкой погрешности R_T составной квадратурной формулы трапеций и неравенством

$$R_T \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\, M_2 = \frac{2}{3n^2} \le \varepsilon. \qquad (*)$$

Для того чтобы непосредственно применить составную формулу трапеций, сделаем замену переменных

$$x = \frac{1}{z^2}, \quad dx = -2\,\frac{dz}{z^3}$$

и преобразуем исходный несобственный интеграл к виду

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \int\limits_0^{1} \frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

Равномерная норма второй производной подынтегральной функции $f_1(z)$ оценивается следующим образом:

$$M_2 = \|f_1''(z)\|_C = \max_{z\in[0,1]} \left| \frac{4(1-3z^2}{1+z^2)^3} \right| = 8.$$

Подставляя a, b и M_2 в неравенство (*), приходим к следующему неравенству для оценки n:

$$\frac{2}{3n^2} \le \varepsilon.$$

Отсюда получаем ответ:

$$n \sim \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}.$$

3. Преобразовать интеграл

$$\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg x}}{x^{3/2}}\, dx$$

так, чтобы для его вычисления можно было непосредственно применить составную формулу трапеций. Оценить количество узлов n, необходимых для вычисления преобразованного интеграла с точностью ε.

Решение. Как и в задачах 1 и 2, для оценки количества узлов n воспользуемся мажорантной оценкой погрешности R_T составной квадратурной формулы трапеций и неравенством

$$R_T \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\, M_2 = \frac{2}{3n^2} \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Для того чтобы непосредственно применить составную формулу трапеций, выполним один раз интегрирование по частям, а затем сделаем замену переменных $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg x}}{x^{3/2}}\, dx = -2x^{-1/2}\operatorname{arctg x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2\,dx}{x^{1/2}(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{4}{1+t^4}\, dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + 4\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\, dt.$$

В задаче 1 равномерную норму второй производной подынтегральной функции в последнем интеграле на отрезке интегрирования мы оценили числом 8. Учитывая множитель 4, заключаем, что для этого интеграла значение M_2 в неравенстве (*) не превосходит 32. Таким образом, из этого неравенства следует искомая оценка для количества узлов n:

$$n \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\varepsilon}}.$$

4. Порядок точности элементарной формулы трапеций пропорционален кубу длины отрезка интегрирования, а составной формулы трапеций пропорционален квадрату длины шага h сетки. Сказанное верно, если вторая производная подынтегральной функции непрерывна. Если это условие нарушается, то теоретический порядок точности не выполняется. Оценить фактический порядок точности метода трапеций при вычислении интеграла

$$I = \int_0^h \sqrt{x}\, dx.$$

Решение. Сначала выпишем точное значение этого интеграла:

$$I = \int_0^h \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\, h^{3/2}.$$

Элементарная формула трапеций $T = (f(a) + f(b))(b - a)/2$ для интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в нашем случае даст следующий результат:

$$I = \int\limits_0^h \sqrt{x}\, dx \approx T = \frac{1}{2}\, h^{3/2}.$$

Выпишем теперь погрешность замены точного значения интеграла на его приближение методом трапеций:

$$I - T = \frac{2}{3}\, h^{3/2} - \frac{1}{2}\, h^{3/2} = \frac{1}{6}\, h^{3/2}.$$

Следовательно, фактический порядок точности метода трапеций при вычислении рассматриваемого интеграла равен $3/2$ и не совпадает с теоретическим.

5. Показать, что для погрешности квадратурной формулы трапеций справедливо следующее интегральное представление:

$$R_T = \int\limits_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b (a-\xi)(b-\xi) f''(\xi)\, d\xi.$$

Решение. Проинтегрируем по частям два раза правую часть этого представления и получим погрешность R_T. Действительно,

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b (a-\xi)(b-\xi) f''(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_a^b (a-\xi)(b-\xi)\, d(f'(\xi)) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(a-\xi)(b-\xi)\, f'(\xi)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int\limits_a^b f'(\xi) d((a-\xi)(b-\xi)) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b f'(\xi)(b-\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_a^b f'(\xi)(a-\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\int\limits_a^b (a-\xi)\, df(x) + \int\limits_a^b (b-\xi)\, df(x)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[f(\xi)(a-\xi)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(\xi)\, d(a-\xi) + f(\xi)(b-\xi)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(\xi)\, d(b-\xi)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[f(b)(a-b) + \int\limits_a^b f(\xi)\, d\xi - f(a)(b-a) + \int\limits_a^b f(\xi)\, d\xi\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-(b-a)(f(a)+f(b))+2\int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi\right] = \int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi - \frac{b-a)}{2}\,(f(a)+f(b)) = R_T.$$

Таким образом, мы показали, что правая часть интегрального представления, выписанного в условии задачи 5, совпадает с погрешностью квадратурной формулы трапеций.

6. Пусть для вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx$$

применяется составная формула трапеций на сетке с n узлами. Оценить минимальное значение n, при котором погрешность этой формулы не превосходит $10^{-3}/2$ при условии, что выполнено следующее неравенство:

$$\int\limits_0^1 |f(x)''|\,dx \leq 1.$$

Решение. Введем обозначения для элементарных подотрезков разбиения отрезка интегрирования для рассматриваемой составной квадратурной формулы трапеций:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Здесь a и b — пределы интегрирования, h — шаг сетки; x_i и x_{i+1} — начало и конец i-го подотрезка; n — число узлов сетки.

На каждом из подотрезков разбиения запишем интегральное представление погрешности формулы трапеций, рассмотренное в задаче 5:

$$R_T(f;[x_i,x_{i+1}]) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,(f(x_i)+f(x_{i+1})) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x_i-\xi)(x_{i+1}-\xi)|f''(\xi)|\,d\xi \leq \frac{1}{2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} |(x_i-\xi)(x_{i+1}-\xi)||f''(\xi)|\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} |(x_i-\xi)(x_{i+1}-\xi)| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |f''(\xi)|\,d\xi.$$

Найдем теперь значение $\xi_{\max}$, при котором достигается максимум выписанного интегрального представления. Для этого используем необходимое условие экстремума, которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\,[(x_i-\xi)(x_{i+1}-\xi)] = 0.$$

Из этого необходимого условия заключаем, что

$$\xi_{\max} = x_i + \frac{h}{2}.$$

Следовательно, искомый максимум имеет вид

$$\max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} |(x_i-\xi)(x_{i+1}-\xi)| = |(x_i-\xi_{\max})(x_{i+1}-\xi_{\max})|\frac{h^2}{4}.$$

Отсюда получаем следующую оценку сверху для погрешности формулы трапеций на каждом подотрезке разбиения:

$$R_T(f;[x_i,x_{i+1}]) \le \frac{h^2}{8}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |f''(\xi)|\,d\xi.$$

Суммируя эту оценку по $i=0,\ldots,n-1$ (т.е. по всем подотрезкам разбиения), получим оценку погрешности составной формулы трапеций для всего отрезка интегрирования:

$$R_T(f;[a,b]) \le \frac{h^2}{8}\int\limits_a^b |f''(\xi)|\,d\xi. \qquad (*)$$

Искомую оценку количества узлов n составной формулы трапеций для всего отрезка интегрирования $[a,b]=[0,1]$ ищем из неравенства

$$R_T(f;[0,1]) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\biggl(\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \le$$

$$\le \frac{h^2}{8}\int\limits_0^1 |f''(\xi)|\,d\xi \le \frac{h^2}{8} = \frac{1}{8n^2} < \frac{10^{-3}}{2},$$

поскольку последний интеграл в этой оценке не превосходит 1 по условию задачи. Отсюда заключаем, что на минимальное количество узлов n должно быть наложено следующее ограничение:

$$n^2 > \frac{10^3}{4} = 250.$$

Таким образом, мы получили ответ для нашей задачи: $n=16$.

7. Пусть для вычисления интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

применяется составная формула трапеций на сетке с n узлами. Показать, что для погрешности справедлива оценка

$$R_T(f;[a,b]) \le \frac{h^2}{8}\int\limits_a^b |f''(\xi)|\,d\xi.$$

Решение. Следует повторить рассуждения, которые в задаче 6 привели к оценке (*).

8. Пусть для вычисления интеграла

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

применяется составная формула трапеций T на сетке с n узлами, т.е. шаг сетки равен $h = (b-a)/(n-1)$. Показать, что

$$I - T = \int\limits_a^b f(x)\,dx - T = -\frac{1}{12}(f'(b) - f'(a))h^2 + O(h^4).$$

Решение. Представим интеграл I в виде суммы составной формулы трапеций и главного члена погрешности:

$$I = T - \frac{1}{12}\sum_{i=1} n - 1 f''(\xi_i)h^3 =$$

$$= T - \frac{1}{12}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} f''(\xi_i)h\Big]h^2.$$

Заметим, что в квадратных скобках в последнем равенстве стоит квадратурная формула для интеграла

$$\int\limits_a^b f''(\xi)\,d\xi$$

и ее главный член погрешности $O(h^2)$. Таким образом, имеем

$$I = T - \frac{1}{12}\left[\int\limits_a^b f''(\xi)\,d\xi + O(h^2)\right]h^2 = T - \frac{1}{12}(f'(b) - f'(a))h^2 + O(h^4).$$

9. Пусть для вычисления интеграла

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

применяются элементарная формула средних прямоугольников

$$I \approx P = h\, f(\bar{x}), \quad h = b - a, \quad \bar{x} = (a+b)/2$$

и элементарная формула трапеций

$$I \approx T = h\, \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2}\bigl(f(a)+f(b)\bigr).$$

Показать, что остаточные члены R^P и R^T этих формул записываются соответственно следующим образом:

$$R^P = I - P = \frac{h^3}{24}\, f''(\bar{x}) + \frac{h^5}{1920}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots$$

и

$$R^T = I - T = -\frac{h^3}{12}\, f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{480}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots .$$

Решение. Сначала разложим $f(x)$ в ряд Тейлора относительно точки $\bar{x} = (a+b)/2$ в предположении о достаточной гладкости функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) \;\; &= \;\; f(\bar{x}) + (x-\bar{x})\, f'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^2}{2}\, f''(\bar{x}) + \\ &\quad + \frac{(x-\bar{x})^3}{6}\, f'''(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^4}{24}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots . \end{aligned} \tag{$*$}$$

Воспользовавшись этим разложением, получим представление остаточного члена формулы средних прямоугольников:

$$I = hf(\bar{x}) + \frac{h^3}{24}\, f''(\bar{x}) + \frac{h^5}{1920}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots = P + R^P, \tag{$**$}$$

поскольку

$$\int\limits_a^b (x-\bar{x})^j\, dx = \begin{cases} h, & j = 0; \\ 0, & j = 1; \\ \dfrac{h^3}{12}, & j = 2; \\ 0, & j = 3; \\ \dfrac{h^5}{80}, & j = 4. \end{cases}$$

Подставим в (*) $x = a$ и $x = b$ и учтем, что $a - \bar{x} = -h/2$ и $b - \bar{x} = h/2$:

$$f(a) = f(\bar{x}) - \frac{h}{2}\, f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}\, f''(\bar{x}) - \frac{h^3}{48}\, f'''(\bar{x}) + \frac{h^4}{384}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots ,$$
$$f(b) = f(\bar{x}) + \frac{h}{2}\, f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}\, f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48}\, f'''(\bar{x}) + \frac{h^4}{384}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots .$$

Сложим эти два равенства:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}\, f''(\bar{x}) + \frac{h^4}{384}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots .$$

Отсюда получим

$$hf(\bar{x}) = h\,\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{h^3}{8}\, f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{384}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots .$$

Подставим это выражение вместо $hf(\bar{x})$ в (**) и получим представление остаточного члена формулы трапеций:

$$I = h\,\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{h^3}{12}\, f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{480}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots = T + R^T. \qquad (***)$$

Из формул (**) и (***) следует, что главные члены погрешности в формулах средних прямоугольников и трапеций имеют вид

$$\frac{h^3}{24}\, f''(\bar{x}) \quad \text{и} \quad -\frac{h^3}{12}\, f''(\bar{x})$$

и имеют противоположные знаки. Это означает, что точное значение интеграла лежит в вилке между ними.

10. Пусть для вычисления интеграла

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

применяется элементарная формула Симпсона

$$S = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right), \quad h = b-a.$$

Найти главный член погрешности этой формулы.

Решение. Из формул (**) и (***) задачи 9 можно записать (напомним, что здесь $h = b-a$):

$$I = P + \frac{h^3}{24}\, f''(\bar{x}) + \frac{h^5}{1920}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots ,$$
$$I = T - \frac{h^3}{12}\, f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{480}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots .$$

Умножим первое равенство на 2/3, а второе на 1/3 и сложим:

$$I = \frac{2}{3}\, P + \frac{1}{3}\, T - \frac{h^5}{2880}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots = S - \frac{h^5}{2880}\, f^{IV}(\bar{x}) + \cdots .$$

Мы видим, что новая формула S, называемая элементарной формулой Симпсона (или формулой парабол), имеет вид

$$S = \frac{2}{3}\,P + \frac{1}{3}\,T = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right), \quad h = b - a. \qquad (*)$$

Отсюда заключаем, что главный член погрешности этой формулы равен

$$-\frac{h^5}{2880}\,f^{IV}(\bar{x}).$$

Отметим важное обстоятельство: из самого вывода этой формулы видно, что ее остаточный член R^S на равномерной сетке имеет разложение по нечетным степеням $h = b - a$, начиная с h^5. Следовательно, формула Симпсона точна для многочленов третьей степени.

Можно изменить запись (*) формулы Симпсона, если рассмотреть ее как частный случай формулы Ньютона–Котеса для равномерной сетки из трех узлов с шагом $h = (b - a)/2$:

$$S = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

В этой записи формулы Симпсона ее главный член погрешности имеет вид

$$-\frac{h^5}{90}\,f^{IV}(\bar{x}).$$

11. Пусть для вычисления интеграла

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

применяются составные формулы трапеций, средних прямоугольников и Симпсона. Найти главные члены погрешности этих формул.

Решение. На отрезке $[a,\, b]$ построим равномерную сетку из n узлов

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

что соответствует разбиению исходного отрезка интегрирования на $n - 1$ подотрезков, которые назовем элементарными. Длина каждого подотрезка равна $h = (b - a)/(n - 1)$. Искомый интеграл I разбивают на сумму интегралов I_i по каждому элементарному подотрезку, которые вычисляются по элементарным формулам трапеций, средних прямоугольников и Симпсона, рассмотренным в задачах 9 и 10. Таким способом получают составные обобщенные квадратурные формулы. В нашем случае это:

— составная формула трапеций

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} T_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} h(f_i + f_{i+1}) -$$

$$- \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} h^3 f'' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - \frac{1}{480} \sum_{i=1}^{n-1} h^5 f^{IV} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \cdots ;$$

— составная формула средних прямоугольников

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} P_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^P = \sum_{i=1}^{n-1} h f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{n-1} h^3 f'' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \frac{1}{1920} \sum_{i=1}^{n-1} h^5 f^{IV} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \cdots ;$$

— составная формула Симпсона

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} S_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^S = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} h \left(f_i + 4 f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + f_{i+1} \right) -$$

$$- \frac{1}{2880} \sum_{i=1}^{n-1} h^5 f^{IV} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \cdots .$$

Остаточные члены этих квадратурных формул могут быть представлены следующим образом (оставляем главные члены погрешностей и отбрасываем члены, содержащие более высокие степени по h):

$$R^T \approx -\frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^{n-1} h f'' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \approx -\frac{h^2}{12} \int\limits_a^b f''(x)\, dx = O(h^2);$$

$$R^P \approx \frac{h^2}{24} \sum_{i=1}^{n-1} h f'' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \approx \frac{h^2}{24} \int\limits_a^b f''(x)\, dx = O(h^2);$$

$$R^S \approx -\frac{h^4}{2880} \sum_{i=1}^{n-1} h f^{IV} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \approx -\frac{h^4}{2880} \int\limits_a^b f^{IV}(x)\, dx.$$

Приведенные оценки являются асимптотическими, т.е. выполняются при $h \to 0$ с точностью до членов более высокого порядка малости. Однако для справедливости этих оценок необходимо существование непрерывных производных подынтегральной функции соответствующих порядков. Если эти производные кусочно-непрерывны, то можно сделать только мажорантные оценки:

$$|R^T| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2, \; |R^P| \le \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2, \; |R^S| \le \frac{(b-a)}{2880} h^4 M_4,$$

$$M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|, \quad M_4 = \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|.$$

12. Запишем квадратурную формулу Ньютона–Котеса, построенную по n узлам, в виде

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} c_i f_i + R, \qquad (*)$$

где a и b —пределы интегрирования, $f(x)$ — подынтегральная функция, c_i — веса Котеса и R — остаточный член. Говорят, что квадратурная формула имеет алгебраический порядок точности p, если ее остаточный член R равен нулю для всех алгебраических многочленов степени меньшей или равной p. По построению n-точечная формула Ньютона–Котеса имеет алгебраический порядок точности не ниже $n-1$. Показать, что если значение n нечетно, т.е. когда середина отрезка $[a,b]$ в ходит в состав узлов, по которым эта формула строится, то формула оказывается точна и для многочленов степени n.

Решение. При нечетном n один из узлов сетки совпадает с серединой отрезка интегрирования $\bar{x} = (a+b)/2$, а остальные узлы лежат симметрично относительно $\bar{x}$. Рассмотрим многочлен $q(x) = (x-\bar{x})^n$. Этот многочлен является нечетным относительно $\bar{x}$; следовательно,

$$\int\limits_a^b q(x) = 0.$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i q_i = 0,$$

поскольку веса Котеса равны для узлов, симметрично расположенных относительно середины отрезка. Отсюда заключаем, что $R=0$, т.е. формула (*) точна для многочлена $q(x)$. Покажем, что эта формула точна и для любого многочлена $p_n(x)$ степени n:

$$p_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}.$$

Для этого представим $p_n(x)$ в виде

$$p_n(x) = a_1(x-\bar{x})^n + p_{n-1}(x) = a_1q(x) + p_{n-1}(x)$$

и подставим его в (*). Поскольку формула (*) по построению точна для $p_{n-1}(x)$ и точна для $q(x)$, то она точна и для любого многочлена $p_n(x)$.

13. Асимптотические и мажорантные оценки главных членов погрешностей квадратурных формул либо трудно использовать на практике, либо дают излишне малые значения для шага интегрирования. Рассмотреть

практически эффективный и легко реализуемый способ контроля точности интегрирования, основанный на оценке главного члена погрешности квадратур при помощи правила Рунге. Этот метод называют еще методом двойного пересчета или экстраполяцией по Ричардсону.

Решение. Пусть на отрезке $[a,\, b]$ взята равномерная сетка $\{x_i\}$ с шагом h. Вычислим на этой сетке приближенное значение I_h интеграла I по какой-либо составной квадратурной формуле, имеющей алгебраический порядок точности $p-1$. Это означает, что имеет место равенство

$$I - I_h = ch^p + O(h^{p+1}),$$

где в правой части стоит разложение остаточного члена по степеням h.

Теперь построим сетку с шагом $h/2$ и вычислим $I_{h/2}$ по той же самой квадратурной формуле. Тогда имеем

$$I - I_{h/2} = \tilde{c}\left(\frac{h}{2}\right)^p + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}\right).$$

Будем считать, что $c \approx \tilde{c}$ в силу достаточной малости h. Из этих двух равенств мы можем выразить главный член погрешности ch^p через I_h и $I_{h/2}$ с точностью до $O\left(h^{p+1}\right)$:

$$I_{h/2} - I_h = ch^p - c\,\frac{h^p}{2^p} + O\left(h^{p+1}\right),$$

откуда

$$ch^p = \frac{I_{h/2} - I_h}{1 - 2^{-p}} + O\left(h^{p+1}\right).$$

Это равенство называют первой формулой Рунге.

Таким образом, можно сформулировать простейший алгоритм вычисления интеграла с заданной точностью ε по выбранной квадратурной формуле: если $\delta = |ch^p| \le \varepsilon$, то интеграл вычислен с заданной точностью; если же $\delta > \varepsilon$, то шаг h еще раз делится пополам и процедура повторяется.

14. Рассмотренные разложения остаточных членов квадратурных формул проводились при условии достаточной гладкости подынтегральной функции. Если же функция не обладает требуемой гладкостью, то эти разложения уже не имеют смысла, т.е. нам уже не известен фактический (реальный, эффективный) порядок точности этих формул. Рассмотреть процесс Эйткена, которой на основе повторных просчетов на нескольких сетках дает возможность оценить фактический порядок точности p квадратурной формулы для заданной подынтегральной функции.

Решение. В упрощенном виде процесс Эйткена можно описать следующим образом.

Выберем три сетки с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$. Вычислим приближения I_h, $I_{h/2}$ и $I_{h/4}$ к интегралу I по выбранной квадратурной формуле.

Тогда, если учитывать только главный член погрешности, имеем три уравнения для определения I, c и p, где p — фактический, заранее неизвестный порядок точности формулы для данной подынтегральной функции:

$$I = I_h + ch^p,$$
$$I = I_{h/2} + \frac{1}{2^p}\, ch^p,$$
$$I = I_{h/4} + \frac{1}{4^p}\, ch^p,$$

в которой значения I, c и p неизвестны. Из первого и второго уравнений имеем

$$ch^p \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) = I_{h/2} - I_h.$$

Из второго и третьего уравнений получим

$$\frac{1}{2^p}\, ch^p \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) = I_{h/4} - I_{h/2}.$$

Из последних двух равенств получаем уравнение для определения p:

$$2^p = \frac{I_{h/2} - I_h}{I_{h/4} - I_{h/2}}\,.$$

Оценка для главного члена погрешности имеет вид

$$ch^p = \frac{\left(I_{h/2} - I_h\right)^2}{2I_{h/2} - I_h - I_{h/4}}\,.$$

Полученную оценку можно использовать для уточнения I_h.

Пример 1. Пусть вычисляется следующий интеграл методом трапеций:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

Тогда для этого интеграла фактический порядок точности p будет равен $3/2$.

Пример 2. Пусть вычисляется следующий интеграл методом трапеций:

$$\int\limits_0^1 \sqrt[n]{x}\, dx.$$

Тогда для этого интеграла фактический порядок точности p будет равен $(n+1)/n$.